CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

Clasa a IX-a

1. Într-un acvariu sunt 200 de peşti. 1% dintre ei sunt albaştri, toţi ceilalţi fiind galbeni. Câţi peşti galbeni trebuie luaţi din acvariu, astfel încât peştii albaştri să reprezinte 2% din toţi peştii rămaşi în acvariu?

Soluţie:

Calculează numărul de peşti albaştri: $1\% \cdot 200 = 2$ peşti 2p

Calculează numărul de peşti galbeni: $200 - 2 = 198$ peşti 1p

Dacă sunt luaţi din acvariu x peşti galbeni, rămân $200 - x$ peşti (în total) 1p

$2 = \frac{2}{100} \cdot (200 - x)$ 1p

Determină $x = 100$ peşti galbeni ce trebuie luaţi din acvariu 2p

2. O sferă care alunecă pe un plan înclinat parcurge în prima secundă 0,4 m şi în fiecare din secundele următoare cu 0,5 m mai mult decât în secunda precedentă. Ce distanţă a parcurs sfera după 25 de secunde?

Soluţie:

Distanţa parcursă după prima secundă $d_1 = 0{,}4$m

Distanţa parcursă după a doua secundă $d_2 = 0{,}4 + 0{,}5$ 1p

Distanţa parcursă după a treia secundă $d_3 = 0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}5$ şi aşa mai departe 1p

Observă că distanţele parcurse se află în progresie aritmetica cu primul termen de 0,4m şi raţia de 0,5m 2p

Scrie suma distantelor $S_{25} = d_1 + d_2 + ... + d_{25}$ 1p

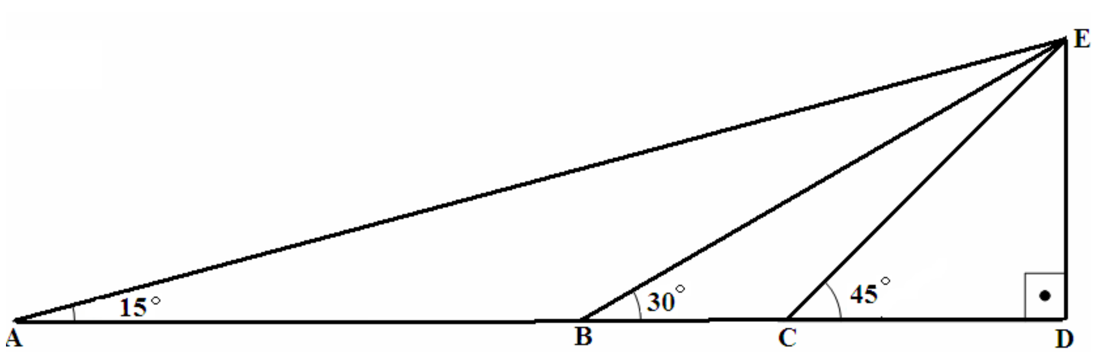
Calculează $S_{25} = 160$ m 2p

3. Un topograf observă că dintr-un punct A o clădire se vede sub unghiul de 15°. Apropiindu-se cu 20 m din punctul B, unghiul de observare este de 30°, iar după încă $\left(10\sqrt{3} - 10\right)$ m din punctul C unghiul devine 45°. Determinaţi:

a) Înălţimea clădirii

b) Distanţa de la punctul A la punctul cel mai înalt al clădirii.

Soluţie:



a) Figura 1p

Dacă DE este înălţimea clădirii, în Δ BDE : m ($\sphericalangle$D) = 90°, m($\sphericalangle$B)=30° $\Rightarrow$ BE = 2DE 1p

În Δ ADE: m($\sphericalangle$B)=30°, m($\sphericalangle$D)=90°, m ($\sphericalangle$E)=75°, m($\sphericalangle$AEB) = m($\sphericalangle$AED) - m($\sphericalangle$BED) = 75° - 60° =

= 15° $\Rightarrow$ Δ ABE isoscel 2p

Δ ABE isoscel $\Rightarrow$ AB = BE $\Rightarrow$ BE = 20m, BE = 2DE, BE = 20m $\Rightarrow$ DE=10m 1p

b) În Δ ABE se aplică teorema cosinusului pentru latura AE:

$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB\cdot BE\cdot\cos(\sphericalangle B)$ 1p

$AE^2 = 800 + 400\sqrt{3} \Rightarrow AE = 200\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 1p

4. În sistemul de coordonate (xOy) se consideră punctele A(2x - 1, 0), B(x, 0), C(0, x), $x\in\mathbb{R}$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}\left[AB^2+AC^2+BC^2+\frac{m}{4}\right], m\in\mathbb{R}$

Să se determine funcţia f, ştiind că graficul funcţiei este tangent la axa Ox.

<u>Soluţie:</u>

$AB^2 = x^2 - 2x + 1$ 1p

$AC^2 = 5x^2 - 4x + 1$ 1p

$BC^2 = 2x^2$ 1p

$f(x) = 4x^2 - 3x + 1 + \frac{m}{8}$ 1p

Din faptul ca graficul este tangent la axa Ox $\Rightarrow \Delta = 0$ 1p

$\Delta = 9-16\left(1+\frac{m}{8}\right) \Rightarrow 9-16\left(1+\frac{m}{8}\right)=0 \Rightarrow m=-\frac{7}{2}$ 1p

$f(x) = 4x^2 - 3x + \frac{9}{16}$ 1p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

Clasa a X-a

1. O întreprindere este construită astfel încât suma distanţelor la cei patru furnizori de materii prime să fie minimă. Raportându-ne la un sistem de axe ortogonale, cu unitatea de 1km, locaţiile furnizorilor au următoarele coordonate: $O(0,0)$, $B(8,20)$, $C(36,27)$, $D(56,0)$.
Determinaţi coordonatele punctului A unde se află întreprinderea.

Soluţie:

În ΔAOC: AO + AC ≥ OC; AO + AC este minim ⇔ AO + AC = OC ⇔ A ∈ OC 1p
În ΔABD: AB + AD ≥ BD; AB + AD este minim ⇔ AB + AD = BD ⇔ A ∈ BD 1p
AO + AB + AC + AD este minimă ⇔ A este intersecţia dreptelor OC şi BD 1p
Ecuaţia dreptei OC: 3x - 4y = 0 .... 1p
Ecuaţia dreptei BD : 5x + 12y = 280 .... 1p
Coordonatele punctului A se obţin prin rezolvarea sistemului format din ecuaţiile dreptelor OC şi BD 1p
Se găseşte A (20, 15) 1p

2. Sistemul de scriere Braille, utilizat de către orbi, constă din caractere cuprinzând fiecare între 1 şi 6 puncte în relief (punctele înnegrite), dispuse astfel (ex. litera A): • ◦ .
◦ ◦
◦ ◦

a) Câte caractere are sistemul?
b) Câte combinaţii pot fi formate din exact trei puncte în relief?

Soluţie:

a) Numărul de submulţimi al unei mulţimi cu 6 elemente este $2^6 = 64$ 2p
Trebuie să fie cel puţin un punct în relief: 64 -1 = 63 .... 2p
b)Numărul combinaţiilor de trei puncte în relief din 6 este C_6^3 .... 2p
Calculează $C_6^3 = 20$ 1p

3. a) Să se rezolve: $5^x + 12^x \le 13^x$.
b) Demonstraţi că 2^{2012} are cel puţin 604 cifre.

Soluţie:

a) $5^2 + 12^2 = 13^2$ 1p

inecuaţia este echivalentă cu $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x \le 1$; dar $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$ 1p

Funcţiile $\left(\frac{5}{13}\right)^x, \left(\frac{12}{13}\right)^x$ sunt strict descrescătoare şi suma lor este funcţie strict descrescătoare 1p

Obţine $x \in [2, \infty)$ 1p

b) $2^{2012} = 2^{2010} \cdot 4 = \left(2^{10}\right)^{201} \cdot 4 = 1024^{201} \cdot 4$ 2p

$\Rightarrow 2^{2012} > 1000^{201} = 10^{603}$ care are 604 cifre 1p

4. Magnitudinea aparentă a unui astru de luminozitate L este definită în raport cu o luminozitate de referinţă L_0 prin $M = \lg\frac{L}{L_0}$ prin convenţia: magnitudinea creşte de 5 ori când luminozitatea se micşorează de 100 ori. Determinaţi partea întreagă a magnitudinii aparente a următoarelor corpuri cereşti: Sirius (L = 3,87L_0), Venus (L=43,65L_0), Luna ($L = 1,2\cdot 10^5$), Soare ($L = 4,786\cdot 10^{10}$).

Soluţie:

$M_1 = \lg 3,87; M_2 = \lg 43,65;$ 1p

$M_3 = \lg 1,2\cdot 10^5; M_4 = \lg 4,786\cdot 10^{10}$ 1p

$10^0 < 3,87 < 10^1 \Rightarrow \lg 3,87 \in (0;1) \Rightarrow [\lg 3,87] = 0$ 1p

analog $[\lg 43,65] = 1$ 1p

$\lg 1,2\cdot 10^5 = \lg 1,2 + 5$ şi $\lg 4,786\cdot 10^{10} = \lg 4,786 + 10$ 2p

$[\lg 4,786] = 5$ şi $\left[\lg 4,786\cdot 10^{10}\right] = 10$ 1p

Notă: Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

Clasa a XI-a

1. Într-un lac sărat adânc de 10m, salinitatea straturilor de apă (raportul dintre masa de săruri şi masa amestecului de apă cu săruri) creşte direct proporţional cu adâncimea, de la 8% la suprafaţă până la 13% la fundul său. Exprimaţi salinitatea s% a stratului aflat la adâncimea de h metri ($0 \leq h \leq 10$).

Soluţie:

Pentru 10m salinitatea creşte cu 5% 2p

Pentru h metri creşte cu $h \cdot 0{,}5\%$ 3p

s% = (0,5h + 8)% 2p

2. Notele obţinute de un grup de 20 de elevi la două teste sunt următoarele:

Testul A

Nota	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efectiv elevi	0	0	2	2	3	4	6	2	1

Testul B

Nota	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efectiv elevi	3	2	1	0	1	0	4	4	5

a) Comparaţi mediile m_1 şi m_2 în cele două cazuri.

b) Comparaţi abaterile medii pătratice, σ_1 şi σ_2.

c) Aflaţi numărul de elevi pentru care nota este situată în intervalul $(m_i - \sigma_i, m_i + \sigma_i)$, $i \in \{1; 2\}$.

Soluţie:

a) $m_1 = m_2 = 7$ 2p

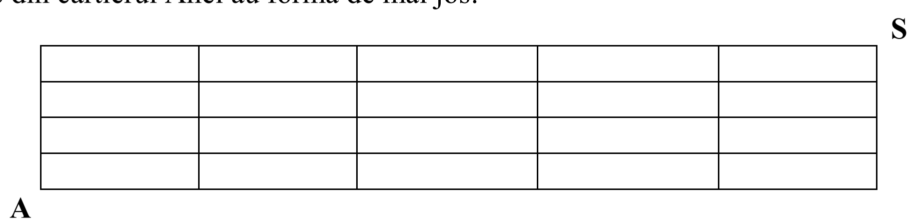
b) Scrie formulele: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ şi $\sigma^2 = \dfrac{\sum (x_i - m)^2 \cdot n_i}{\sum n_i}$ 1p

Calculează $\sigma_1 \simeq 1{,}61$ şi $\sigma_2 \simeq 3{,}02$ 1p

Obţine $\sigma_1 < \sigma_2$ 1p

c) în (5,39; 8,61) sunt 13 elevi; în (3,98; 10,02) sunt 15 elevi 2p

3. Străzile din cartierul Anei au forma de mai jos:



Pentru a ajunge de acasă (A) la serviciu (S) ea parcurge în fiecare zi un drum de lungime minimă.

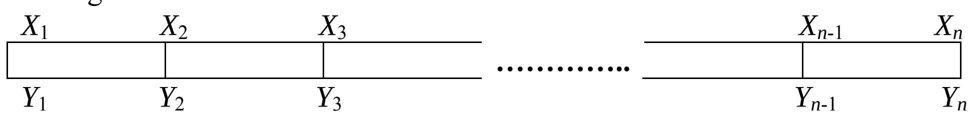
a) Ştiind că dimensiunile unui dreptunghi mic sunt: 300m latura orizontală şi 200m cea verticală, aflaţi lungimea drumului minim.

b) După câte zile în care a mers pe trasee diferite, Ana a trebuit să reia un drum parcurs anterior?

<u>Soluţie:</u>
a) Parcurge 5 laturi orizontale şi 4 verticale 2p
$D_{min} = 5 \cdot 300 + 4 \cdot 200 = 2300$m 2p

b) Există C_9^4 sau $C_9^5 = 126$ trasee diferite (alegem 4 segmente verticale sau 5 segmente orizontale dintre cele 9) 2p
În 126 zile parcurge traseele diferite. În a 127-a zi va relua un traseu anterior 1p

4. Se consideră graful scară cu 2n vârfuri:



a) Dacă n = 3, în câte moduri putem alege 3 muchii care nu au două câte două extremităţi comune?

b) Dacă f(n) reprezintă numărul de moduri în care putem alege n muchii care nu au două câte două extremităţi comune pentru o scară cu *n* trepte, arătaţi că pentru $n \geq 3$, $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

<u>Soluţie:</u>
a) (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), (X_3,Y_3); (X_1,X_2), (Y_1,Y_2), (X_3,Y_3); (X_1,Y_1), (X_2,X_3), (Y_2,Y_3), deci 3 moduri 3p
b) (X_1,Y_1), deci $f(1) = 1$; (X_1,X_2), (Y_1,Y_2) sau (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), deci $f(2) = 2$; $f(3) = 3$ 2p
În general, putem alege fie muchia (X_1,Y_1) şi rămân pentru celelalte $f(n-1)$ posibilităţi, fie muchiile (X_1,X_2) şi (Y_1,Y_2) şi rămân $f(n-2)$ posibilităţi; deci $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ 2p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

Clasa a XII-a

1. Un lot de jucători al unei echipe de fotbal are 2 portari, 8 jucători pentru apărare şi 9 jucători de atac. În câte moduri se poate forma echipa de start cu 11 jucători selectaţi din lotul existent, dacă aceasta trebuie să fie compusă din: 1 portar, 4 jucători de apărare şi 5 jucători de atac?

Soluţie:

Numărul de moduri în care pot fi aleşi portarii $C_2^1 = 2$ 1p

Numărul de moduri în care pot fi aleşi jucătorii pentru apărare $C_8^4 = 35$ 2p

Numărul de moduri în care pot fi aleşi jucătorii în atac $C_9^5 = 126$ 2p

Numărul de moduri în care poate fi formată echipa $C_2^1 \cdot C_8^4 \cdot C_9^5$ 1p

Calcul final şi răspuns la cerinţă $C_2^1 \cdot C_8^4 \cdot C_9^5 = 8820$ 1p

2. Americanul John a moştenit 25000 de dolari. O parte din aceşti bani i-a depus într-o bancă, o parte i-a investit în obligaţiuni municipale şi o parte intr-un fond mutual. După un an el a primit o dobândă totală de 1620 de dolari. Ştiind că banca i-a plătit o dobânda de 6% anual, obligaţiunile o dobândă de 7% anual, fondul mutual 8% anual şi că John a investit mai mult cu 6000 de dolari în obligaţiuni municipale decât în fondul mutual, precizaţi ce sume a investit John in fiecare categorie.

Soluţie:

Notează cu: x - suma depusă la banca, y - suma investită în obligaţiuni municipale, z - suma investita in fondul mutual 1p

Scrie sistemul: $\begin{cases} x+y+z=25000 \\ 0,06x+0,07y+0,08z=1620 \\ y-z=6000 \end{cases}$ 3p

Rezolvă sistemul prin orice metodă cunoscută şi obţine: $\begin{cases} x=15000 \\ y=8000 \\ z=2000 \end{cases}$ 2p

Răspunde problemei, John

- a depus la banca 15.000 de dolari
- a investit în obligaţiuni municipale 8000 de dolari
- a investit in fondul mutual 2000 de dolari 1p

3. Se considera matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze A^4.

b) Dacă matricea $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţiile $B \cdot E_1 = E_1 \cdot B$ şi $B \cdot E_2 = E_2 \cdot B$, să se demonstreze că există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

c) Să se demonstreze că: dacă oricare ar fi $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^n \cdot X = X \cdot A^n$, atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = 4k$.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

<u>Soluţie:</u>

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

$A^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot I_2$ 1p

b) Dacă $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, din $B \cdot E_1 = E_1 \cdot B \Rightarrow a = d$ şi $b = 0$ 1p

din $B \cdot E_2 = E_2 \cdot B \Rightarrow a = d$ şi $c = 0$, adică $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ 1p

c) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $n = 4k$, atunci $A^n = (-4)^k \cdot I_2$, $A^n \cdot X = X \cdot A^n$, $(\forall) X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

dacă $n = 4k + 1$, atunci $A^n = A^{4k} \cdot A = (-4)^k \cdot A$; obţine $A \cdot X = X \cdot A$, şi pentru $X = E_1$ avem o propoziţie falsă 1p

dacă $n = 4k + 2$, atunci $A^n = A^{4k} \cdot A^2 = (-4)^k \cdot A^2$; obţine $A^2 \cdot X = X \cdot A^2$, şi pentru $X = E_1$ avem o propoziţie falsă:

dacă $n = 4k + 3$, atunci $A^n = A^{4k} \cdot A^3 = (-4)^k \cdot A^3$; obţine $A^3 \cdot X = X \cdot A^3$, şi pentru $X = E_1$ avem o propoziţie falsă 1p

Singurul caz când se verifică relaţia $A \cdot X = X \cdot A$, $(\forall) X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$ 1p

4. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziţie $x * y = 5xy + 6x + 6y + 6$.

a) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

b) Să se determine elemente simetrizabile ale mulţimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea "$*$" .

c) Să se rezolve ecuaţia $\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } 2012 \text{ ori}} = -1$.

<u>Soluţie:</u>

a) Calculează $(x * y) * z$ şi $x * (y * z)$ 1p

Demonstrează că $(x * y) * z = x * (y * z)$ oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Z}$ 1p

b) Dacă $e \in \mathbb{Z}$ este elementul neutru al legii, din $x * e = e * x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{Z}$, obţine $e = -1$ 1p

Dacă x' este simetricul elementului $x \in \mathbb{Z}$, atunci $x' = \dfrac{-6x-7}{5x+6} \in \mathbb{Z}$ 1p

Găseşte $5x + 6$ este un divizor întreg al lui 1 (sau -1), atunci $x = -1$ este singurul element simetrizabil, cu $x' = -1$ 1p

c) Avem $x * x' = -1$ şi $\underbrace{x * x * ... * x}_{2012 \text{ factori}} \overset{\text{cf. a)}}{=} x * (\underbrace{x * x * ... * x}_{2011 \text{ factori}}) = -1$, de unde $\underbrace{x * x * ... * x}_{2011 \text{ factori}} = x' = -1$ 1p

După 2010 paşi se obţine $x * x = -1$, de unde $x = -1$ soluţie unică 1p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.